DIE GRUNDFORMELN

DER ALLGEMEINEN

KURVEN- UND FLÄCHENTHEORIE

IM NICHT-EUKLID'SCHEN RAUM.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

VORGELEGT

VON

EMIL RATH

AUS URACH.

TÜBINGEN, 1894.

DRUCK VON HEINRICH LAUPP JR.

DIE GRUNDFORMELN

DER ALLGEMEINEN

KURVEN- UND FLÄCHENTHEORIE

IM NICHT-EUKLID'SCHEN RAUM.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

EINER HOHEN

NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

EBERHARD-KARL-UNIVERSITÄT ZU TÜBINGEN

BIBLIOTHEEK RIJKS UNIV. LEIDEN

VORGELEGT

VON

EMIL RATH

AUS URACH.

TÜBINGEN, 1894.

DRUCK VON HEINRICH LAUPP JR.

Von der Fakultät angenommen den 2. August 1894.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die wichtigsten Formeln und Sätze der allgemeinen Flächentheorie auf die Nicht-Euklid'sche Geometrie zu übertragen. Die Untersuchungen schliessen sich nach Form und Inhalt im Wesentlichen an „Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie" von den Herren Stahl-Kommerell (Leipzig 1893, Teubner) an, wo die entsprechenden Formeln und Sätze für die Euklid'sche Geometrie zusammengestellt sind.

Auf ein Aussprechen der Formeln in Worten oder in Sätzen ist im Allgemeinen verzichtet worden, da es an sich nicht schwierig, aber etwas umständlich ist. Die Formeln und Beweise sind in einer Weise abgeleitet und geschrieben, die sich fast immer unmittelbar auf n Dimensionen übertragen lässt.

Die Grundlagen der Nicht-Euklid'schen Geometrie dürfen als bekannt vorausgesetzt werden. Sie finden sich ausführlich erörtert und mit allen Litteraturangaben versehen in dem bekannten Werke von Herrn Killing[1]). Die §§ 10—13 dieses Werkes enthalten auch eine Reihe von Untersuchungen über allgemeine Kurven und Flächen im Nicht-Euklid'schen, n dimensionalen Raum, besonders über die Krümmungsverhältnisse der Raumkurve, die Hauptkrümmungsradien eines (n—1) dimensionalen Gebildes und die Abwickelbarkeit mehrdimensionaler Gebilde. Die in der vorliegenden Arbeit enthaltenen Untersuchungen bilden, wenn sie sich auch auf den 3 dimensionalen Raum beschränken, in mehrfacher Beziehung eine Ergänzung der dort mitgeteilten und auch in den letzten Jahren hinzugekommenen Resultate.

Es sei mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Stahl, meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die vielseitige Anregung, die ich während meiner Studien und bei dieser Arbeit von ihm erfahren durfte.

1) Killing, Die Nicht-Euklid'schen Raumformeln in analyt. Behandlung. Leipzig. 1885.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552309_0064

Einleitung.

Hilfssatz aus der Determinantentheorie. Definitionen der Nicht-Euklid'schen Geometrie.

Wir betrachten das System von m . n Grössen x (wobei $n \geqq m$):

$$\begin{matrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & . & . & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & . & . & x_n^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ x_1^{(m)} & x_2^{(m)} & . & . & x_n^{(m)} \end{matrix}$$

und ein analog gebildetes System von m . n Grössen y. Die Summe der Produkte je einer Unterdeterminante mter Ordnung des Systems der x in die entsprechende Unterdeterminante des Systems der y bezeichnen wir mit D_{xy}, und schreiben:

$$D_{xy} = \begin{Vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & . & . & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & . & . & x_n^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ x_1^{(m)} & . & . & . & x_n^{(m)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} y_1^{(1)} & y_2^{(1)} & . & . & y_n^{(1)} \\ y_1^{(2)} & y_2^{(2)} & . & . & y_n^{(2)} \\ . & . & . & . & . \\ y_1^{(m)} & . & . & . & y_n^{(m)} \end{Vmatrix}$$

$$= \| x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad . \quad . \quad x^{(m)} \| \cdot \| y^{(1)} \quad y^{(2)} \quad . \quad . \quad y^{(m)} \| .$$

Die Grösse D_{xy} ist dann darstellbar als Determinante mter Ordnung, und ein Element a_{ik} dieser Determinante ist:

$$a_{ik} = \Sigma x_\alpha^{(i)} y_\beta^{(k)} \; ; \; (\alpha, \beta = 1,2 \ldots n)$$

$$(I) \qquad D_{xy} = | a_{ik} | \; ; \; (i, k = 1,2 \ldots m).$$

Definitionen der Nicht-Euklid'schen Geometrie.

Von den rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z ausgehend definieren wir ein homogenes Tetraederkoordinatensystem durch:

$$\rho x_i = \alpha_{i1} x + \alpha_{i2} y + \alpha_{i3} z + \alpha_{i4} \; (i = 1 \ldots 4),$$

wobei die Determinante $| \alpha_{ik} | \gtrless 0$ sein soll.

Um in der Nicht-Euklid'schen Geometrie metrische Begriffe einzuführen, muss man eine allgemeine Fläche zweiten Grads (Fun-

damentalfläche, Massfläche) als gegeben voraussetzen, welche an die Stelle des unendlich fernen, imaginären Kugelkreises der Euklid'schen Geometrie tritt. Hiedurch wird der Charakter der Dualität, der sonst nur der projektiven Geometrie eigen ist, auch der Metrik gegeben.

Jede Gerade als Punktreihe (Ebenenbüschel) bestimmt mit der gegebenen Fläche zweiten Grads zwei Schnittpunkte (Tangentialebenen). Zwei beliebige andere Punkte der Geraden bilden mit den beiden Schnittpunkten ein gewisses Doppelverhältnis D. Der Abstand r der beiden beliebigen Punkte der Geraden ist eine Funktion des Doppelverhältnisses D. Ebenso ist der Winkel φ zweier Ebenen des Büschels eine Funktion des Doppelverhältnisses D', das diese beiden Ebenen und die beiden Tangentialebenen des Büschels bilden. Der Abstand r zweier Punkte, und der Winkel φ zweier Ebenen sind definiert durch:

$$r = \frac{k\sqrt{-1}}{2} \log D; \qquad \varphi = \frac{k'\sqrt{-1}}{2} \log D'.$$

Wir nehmen nun die Gleichung der Fundamentalfläche in Punktkoordinaten x und in Ebenenkoordinaten X in der Form an:

$$w = w_{xx} = \Sigma w_{ik} x_i x_k = 0$$
$$W = W_{xx} = \Sigma W_{ik} X_i X_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Der Abstand r zweier Punkte x $(x_1 \ldots x_4)$ und y $(y_1 \ldots y_4)$ ist dann:

$$r = \frac{k\sqrt{-1}}{2} \log \frac{w_{xy} + \sqrt{w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy}}}{w_{xy} - \sqrt{w_{xy}^2 - w_{xx} \cdot w_{yy}}}.$$

Der Winkel φ zweier Ebenen X $(X_1 \ldots X_4)$ und Y $(Y_1 \ldots Y_4)$ ist:

$$\varphi = \frac{k'\sqrt{-1}}{2} \log \frac{W_{XY} + \sqrt{W_{XY}^2 - W_{XX} W_{YY}}}{W_{XY} - \sqrt{W_{XY}^2 - W_{XX} W_{YY}}}.$$

Hienach wird:

$$\cos^2\left(\frac{r}{k}\right) = \frac{w_{xy}^2}{w_{xx} \cdot w_{yy}}; \quad \sin^2\left(\frac{r}{k}\right) = \frac{w_{xx} w_{yy} - w_{xy}^2}{w_{xx} w_{yy}}$$

$$\cos^2\left(\frac{\varphi}{k'}\right) = \frac{W_{XY}^2}{W_{XX} W_{YY}}; \quad \sin^2\left(\frac{\varphi}{k'}\right) = \frac{W_{XX} W_{YY} - W_{XY}^2}{W_{XX} W_{YY}}.$$

Die Nicht-Euklid'sche Geometrie wird im besonderen Falle zur

elliptischen Geometrie (Riemann); falls $w = 0$ imaginär, k und k' reell sind;

hyperbolischen Geometrie (Lobatschewsky), falls $w = 0$ reell, k rein imaginär, k' reell ist;

parabolischen Geometrie (Euklid); falls $w = 0$ den unendlich fernen imaginären Kugelkreis bedeutet, $k = \infty$; $k' = 1$ ist.

Ist das Koordinatentetraeder sich selbst konjugiert in Beziehung auf die Fundamentalfläche, so nimmt die Gleichung der letzteren die Form an:

$$w = \Sigma k_i x'^2_i = 0. \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Durch die Substitution

$$x_i' \sqrt{k_i} = x_i$$

erhalten wir die Form:

$$w = \Sigma x_i^2 = 0; \; W = \Sigma X_i^2 = 0 \qquad (i = 1 \ldots 4).$$

Da es sich im folgenden nur um die analytische Fassung und Behandlung der Flächen- und Kurventheorie handelt, so werden wir die Fundamentalfläche immer als in dieser Form gegeben voraussetzen.

Will man zu einer bestimmten Geometrie [1]) übergehen, so hat man in den folg. Formeln x_1, x_2, x_3 durch $\frac{x_1}{k}$, $\frac{x_2}{k}$, $\frac{x_3}{k}$; X_4 durch $\frac{X_4}{k}$ zu ersetzen; dann ist

für die elliptische Geometrie (Riemann) : $\frac{1}{k^2} > 0$,

„ „ hyperbolische „ (Lobatschewsky) : $\frac{1}{k^2} < 0$,

„ „ parabolische „ (Euklid) : $\frac{1}{k^2} = 0$,

$\frac{1}{k^2}$ heisst nach Riemann das „Krümmungsmass" der betreffenden Raumform.

Um die homogenen Koordinaten absolut festzulegen, hat man noch eine Relation zwischen ihnen einzuführen. Wir setzen für alle im endlichen gelegenen, d. h. nicht der Fundamentalfläche angehörenden Punkte und Ebenen:

(II) $$\Sigma x^2 = 1; \qquad \Sigma X^2 = 1;$$

Hier und im folgenden ist, wo nichts anderes bemerkt wird, die Summation von $x_1 \ldots x_4$ zu nehmen. Unter diesen Voraus-

1) Weierstrass; s. Killing, Die Nicht-Euklid'schen Raumformen (Leipzig, 1885, Teubner) pag. 17 ff.

setzungen ist der Abstand (x y) zweier Punkte und der Winkel (X Y) zweier Ebenen gegeben durch

$$\text{(III)} \qquad \cos^2(x\,y) = (\Sigma xy)^2\,;\ \cos^2(XY) = (\Sigma XY)^2$$

Aus

$$\sin^2(xy) = \begin{vmatrix} \Sigma x^2 & \Sigma xy \\ \Sigma xy & \Sigma y^2 \end{vmatrix}$$

ergiebt sich der Abstand ds zweier unendlich naher Punkte x und x + dx als:

$$\sin^2(x,\ x + dx) = ds^2 = \Sigma dx^2\,;$$

der Winkel zweier unendlich naher Ebenen

$$\text{(IV)} \qquad dS^2 = \Sigma dX^2.$$

Der Winkel v zweier durch die Punkte x′ x″ und y′ y″ bezw. durch die Ebenen X′ X″ und Y′ Y″ bestimmter Geraden ist bestimmt durch:

$$\text{(V)}\quad \cos^2 v = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma x'y' & \Sigma x'y'' \\ \Sigma x''y' & \Sigma x''y'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \Sigma x'^2 & \Sigma x'x'' \\ \Sigma x''x' & \Sigma x''^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma y'^2 & \Sigma y'y'' \\ \Sigma y''y' & \Sigma y''^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma X'Y' & \Sigma X'Y'' \\ \Sigma X''Y' & \Sigma X''Y'' \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \Sigma X'^2 & \Sigma X'X'' \\ \Sigma X''X' & \Sigma X''^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma Y'^2 & \Sigma Y'Y'' \\ \Sigma Y''Y' & \Sigma Y''^2 \end{vmatrix}}$$

Daraus folgt ein Ausdruck für den Winkel v zweier durch die Punkte x, x + dx und x, x + δx gehenden bezw. in den Ebenen X, X + dX und X, X + δX liegenden Geraden:

$$\text{(VI)} \qquad \cos v = \frac{\Sigma dx \,.\, \delta x}{ds \,.\, \delta s} = \frac{\Sigma dX \,.\, \delta X}{dS \,.\, \delta S};\ \text{wo}$$

$$ds^2 = \Sigma dx^2\,;\quad \delta s^2 = \Sigma \delta x^2$$

$$dS^2 = \Sigma dX^2;\quad \delta S^2 = \Sigma \delta X^2.$$

Die Koordinaten der Polarebene eines Punktes x_i sind proportional den partiellen Differentialquotienten von w nach x_i. Da nun $w = \Sigma x^2$, und da für die Koordinaten der Polarebene $W = 0$ gilt, so folgt:

„Die Koordinaten der Polarebene eines Punktes x_i in Beziehung auf die Fundamentalfläche sind gleich x_i“ und:

„Die Koordinaten des Pols einer Ebene X_i in Beziehung auf die Fundamentalfläche sind gleich X_i.“

Ferner gelten folgende Sätze:

„Der Abstand zweier Punkte ist $\frac{\pi}{2}$, wenn einer auf der Polarebene des andern liegt“ (Normalpunkte).

„Der Winkel zweier Ebenen ist $\frac{\pi}{2}$, wenn eine durch den Normalpunkt der andern geht“ (Normalebenen).

„Geht eine Ebene durch die reciproke Polare einer Geraden, so steht sie senkrecht auf derselben und umgekehrt.“

„Geht eine Gerade durch den Pol einer Ebene, so steht sie senkrecht auf der Ebene.“

„Liegt eine Gerade in der Polarebene eines Punkts, so hat sie normalen Abstand von dem Punkt.“

„Der Winkel zweier sich schneidenden Geraden ist gleich dem Winkel ihrer, durch den Schnittpunkt gehenden Normalebenen, oder gleich der Entfernung zwischen ihren in der Verbindungsebene liegenden Normalpunkte.“

Um die geometrische Bedeutung der eingeführten Koordinaten zu erkennen, suchen wir einen Ausdruck für den Abstand eines beliebigen Punktes y von einer Tetraederecke. Für die erste Tetraederecke ist $x_2 = x_3 = x_4 = 0$; daher wegen (II) $x_1 = 1$;

also $\cos^2(xy) = (\Sigma x y)^2 = y_1^2$:

„Die Koordinaten eines Punkts sind die cosinus seiner Entfernungen von den 4 Tetraederecken.

Ebenso sind die Koordinaten einer Ebene die cosinus ihrer Winkel mit den 4 Tetraederflächen.“

Die Koordinaten y_i eines Punktes auf der Verbindungslinie der Punkte x' und x'' sind mit den Koordinaten dieser Punkte durch eine lineare Gleichung verbunden, also:

(VII) $$y_i = \lambda x'_i + \mu x''_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Die Koordinaten y_i eines Punktes, der auf der Verbindungsebene der 3 Punkte x' x'' x''' liegt, sind:

$$y_i = \lambda x'_i + \mu x''_i + \nu x'''_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Für $x' = x$; $x'' = x + dx$; $x''' = x + 2\,dx + d^2x$ hat man

$$y_i = \mu x_i + \mu_1 dx_i \quad \text{bezw.}$$

(VIIa) $$y_i = \mu x_i + \mu_1 dx_i + \mu_2 d^2 x_i$$

als Koordinaten eines Punkts auf der Verbindungslinie zweier, oder auf der Ebene dreier unendlich benachbarter Punkte.

Sind ξ_i die Koordinaten einer Ebene, x_i die Koordinaten eines in der Ebene gelegenen Punktes, so ist

$$\Sigma \xi x = 0.$$

Die Normale der Ebene im Punkt x ist die Verbindungslinie des Punktes x mit dem Pol der Ebene ξ. Da letzterer die Koor-

dinaten ξ hat, so sind die Koordinaten y_i eines auf der Normalen liegenden Punktes:

(VIII) $$y_i = \mu x_i + \lambda \xi_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Daraus ergiebt sich der Abstand r eines Punkts y von einer Ebene ξ; es ist

$\cos r = \Sigma yx = \mu \Sigma x^2 + \lambda \Sigma x\xi = \mu$; ferner

$\Sigma y^2 = 1 = \mu^2 + \lambda^2$; daher $\lambda = \sin r$; nun ist auch:

$\Sigma y\xi = \mu \Sigma x\xi + \lambda \Sigma \xi^2 = \lambda$; also schliesslich:

(IX) $$\sin r = \Sigma y\xi.$$

(IXa) $\Sigma y\xi - \sin r = 0$ mit laufenden Punktkoordinaten y ist die Gleichung einer Ebene, welche von der Ebene ξ den Abstand r hat.

Wir betrachten ein Dreieck, dessen Eckpunkte die Koordinaten x_i, y_i, z_i haben. Ist v der Winkel an der Ecke x, so wird wegen (V):

(X) $$\cos (y\,z) = \cos (x\,z) \cdot \cos (y\,z) + \sin (x\,z) \sin (y\,z) \cdot \cos v.$$

Ist der Winkel bei y gleich $\frac{\pi}{2}$ so folgt:

(Xa) $$\operatorname{tang} (xy) = \operatorname{tang} (x\,z) \cdot \cos v.$$

Sind zwei Gerade gegeben, die eine durch die zwei Punkte

$$x_1^{(1)} \quad x_2^{(1)} \quad x_3^{(1)} \quad x_4^{(1)}$$
$$x_1^{(2)} \quad x_2^{(2)} \quad x_3^{(2)} \quad x_4^{(2)},$$

die andere durch zwei Punkte $y_i^{(1)}$ und $y_i^{(2)}$, so lässt sich der Ausdruck von Gl. (V) für den Winkel v dieser Geraden einfacher schreiben, wenn wir die Grössen D_{xy} von pag. (5) benützen. Wir haben in D_{xy} $n = 4$, $m = 2$ zu setzen, dann wird:

(XI) $$\cos^2 v = \frac{D_{xy}^2}{D_{xx} \cdot D_{yy}}; \quad \sin^2 v = \frac{\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{vmatrix}}{D_{xx} \cdot D_{yy}.}$$

Haben wir 2 Ebenen, die bestimmt sind durch die Punkte

$$x_1^{(1)} \; x_2^{(1)} \; x_3^{(1)} \; x_4^{(1)} \qquad y_1^{(1)} \; y_2^{(1)} \; y_3^{(1)} \; y_4^{(1)}$$
$$x_1^{(2)} \; x_2^{(2)} \; x_3^{(2)} \; x_4^{(2)} \qquad y_1^{(2)} \; y_2^{(2)} \; y_3^{(2)} \; y_4^{(2)}$$
$$x_1^{(3)} \; x_2^{(3)} \; x_3^{(3)} \; x_4^{(3)} \qquad y_1^{(3)} \; y_2^{(3)} \; y_3^{(3)} \; y_4^{(3)}$$

so ist auch der Winkel v zwischen diesen Ebenen gegeben durch:

(XIa) $$\cos^2 v = \frac{D_{xy}^2}{D_{xx} \quad D_{yy}}; \quad \sin^2 v = \frac{\begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} \\ D_{yx} & D_{yy} \end{vmatrix}}{D_{xx} \quad D_{yy}.}$$

Diesmal ist aber in dem Ausdruck für D $n = 4$ und $m = 3$.

Wir nehmen nun an, dass die Punkte x und die Punkte y je

für sich unendlich benachbart sind. Nach Gl. (VIIa) betrachten wir im allgemeinen die beiden Systeme:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdot\,\cdot & x_n \\ dx_1 & dx_2 & \cdot\,\cdot & dx_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{m-1}x_1 & d^{m-1}x_2 & \cdot\,\cdot & d^{m-1}x_n \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdot\,\cdot & y_n \\ dy_1 & dy_2 & \cdot\,\cdot & dy_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d^{m-1}y_1 & d^{m-1}y_2 & \cdot\,\cdot & d^{m-1}y_n \end{array}$$

Für $m = 3$ wird dann beispielsweise:

$$D_{xx} = \|x\ dx\ d^2x\| . \|x\,dx\ d^2x\|.$$

Ferner seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

(XII) $s_{ik} = s_{ki} = \Sigma d^i x . d^k x$; dabei ist $d^0 x = x$ zu setzen, so dass:

$s_{00} = \Sigma x^2 = 1$; $s_{01} = s_{10} = \Sigma x dx = 0$;

$s_{11} = \Sigma dx^2 = ds^2$; $s_{12} = \Sigma dx d^2x = ds d^2s$

$s_{02} = \Sigma x d^2x = -\Sigma dx^2 = -ds^2$ u. s. w.

Ausserdem sei

(XIII) $$S^{(\nu)} = \begin{vmatrix} s_{00} & s_{01} & \cdot & \cdot & s_{0\nu} \\ s_{10} & s_{11} & \cdot & \cdot & s_{1\nu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\nu 0} & s_{\nu 1} & \cdot & \cdot & s_{\nu\nu} \end{vmatrix}$$

$S^{(\nu)}_{ik}$ sei die zum Element s_{ik} der Determinante $S^{(\nu)}$ gehörige Unterdeterminante (ν)ter Ordnung.

Dann ist z. B.

(XIV) $$S^{(0)} = s_{00} = 1; \quad S^{(1)} = \begin{vmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{vmatrix} = ds^2.$$

$$S^{(2)} = \begin{vmatrix} s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ s_{20} & s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = ds^2 [\Sigma (d^2x)^2 - (d^2s)^2 - ds^4],$$

ferner

(XV) $$S_{00}{}^{(1)} = s_{11} = ds^2; \quad S_{00}{}^{(2)} = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = ds^2 [\Sigma (d^2x)^2 - (d^2s)^2]$$

also

(XVa) $$S_{00}{}^{(2)} = S^{(2)} + ds^6$$

Insbesondere sei $y = x + dx$. Für $n = 4$; $m = 2$ erhalten wir dann einen Ausdruck für den unendlich kleinen Winkel dv der zwei Geraden durch die Punkte x, $x + dx$ und y, $y + dy$ $(= x + dx, x + 2dx\, d^2x)$. Es ist nach XI

$$dv^2 = \frac{1}{(D_{xx})^2} \cdot \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{x,\ x+dx} \\ D_{x+dx,\ x} & D_{x+dx,\ x+dx} \end{vmatrix}$$

Um diesen Ausdruck zu berechnen, setzen wir:

$$f(x) = |\, x\ dx\ .\ .\ d^m x\,| \ ; \text{ dann wird:}$$

$$f(y) = f(x+dx) = f(x) + dx\,.\,f'(x)$$
$$= |\, x\ dx\ .\ .\ d^m x\,| + |\, x\ dx\ .\ .\ d^{m-1}x\ d^{m+1}x\,|$$

also:

$$D_{xx} = \| x\ dx\ .\ .\ d^m x \|\,.\,\| x\ dx\ .\ .\ d^m x \| = S^{(m)} = S^{(m+1)}_{m+1,\ m+1}$$

$$D_{x,\ x+dy} = \| x dx\ .\ .\ d^m x \|\,.\,\{ \| x\ dx\ .\ .\ d^m x \| + \| x dx\ .\ .\ d^{m-1}x\ d^{m+1}x \| \}$$
$$= S^{(m)} + S^{(m+1)}_{m,\ m+1}$$

$$D_{x+dx,\ x+dx} = \{ \| x\ dx\ .\ .\ d^m x \| + \| x\ dx\ .\ .\ d^{m-1}x\ d^{m+1}x \| \}\,.$$
$$\{ \| x\ dx\ .\ .\ d^m x \| + \| x\ dx\ .\ .\ d^{m-1}x\ d^{m+1}x \| \}$$
$$= S^{(m)} + 2\,S^{(m+1)}_{m,\ m+1} + S^{(m+1)}_{m,\ m}.$$

Daher

$$dv^2 = \frac{1}{(S^{(m)})^2} \begin{vmatrix} S^{(m+1)}_{m,\ m} & S^{(m+1)}_{m,\ m+1} \\ S^{(m+1)}_{m+1,\ m} & S^{(m+1)}_{m+1,\ m+1} \end{vmatrix};$$

oder nach Baltzer, Det. § 7 (2):

$$\text{(XVI)} \qquad dv^2 = \frac{S^{(m+1)}\ S^{(m-1)}}{(S^{(m)})^2}.$$

Endlich sei noch eine Gleichung abgeleitet, die wir später brauchen werden. Es sei

$$A_i = \begin{vmatrix} x_i & dx_i & . & . & d^\nu x_i \\ s_{0\,0} & s_{0\,1} & . & . & s_{0\,\nu} \\ s_{1\,0} & s_{1\,1} & . & . & s_{1\,\nu} \\ . & . & . & . & . \\ s_{\nu-1,\,0} & s_{\nu-1,\,1} & . & . & s_{\nu-1,\,\nu} \end{vmatrix} = \sum_p d^p x_i\,.\,a_p \qquad (p = 0\ .\ .\ \nu)$$

dabei sind a_p die Unterdeterminanten der Elemente der $(\nu+1)$ten Horizontalreihe von $S^{(\nu)}$.

Wir bilden A_i^2 und summieren von $i = 1 \ldots n$. $(n > \nu)$.

$$\Sigma A_i^2 = \sum_i \{ \sum_p a_p d^p x_i\,.\,\sum_q a_q d^q x_i \} = \sum\sum_{p\ q} a_p\ .\ a_q \sum_i d^p x_i\,.\,d^q x_i$$
$$= \sum\sum_{p\ q} a_p\ .\ a_q\,.\,s_{pq} = \sum_p a_p\,.\,\sum_q a_q s_{pq}.$$

Nun ist $\sum_q a_q s_{pq} = 0$ für alle p, ausser für $p = \nu$; denn es ist eine Determinante mit zwei gleichen Horizontalreihen. Für $p = \nu$ ist $\sum_q a_q s_{pq} = S^{(\nu)}$; ferner ist $a_\nu = S^{(\nu-1)}$; also

$$\text{(XVII)} \qquad \Sigma A_i^2 = a_\nu\,.\,S^{(\nu)} = S^{(\nu-1)}\ .\ S^{(\nu)}.$$

§ 1. Die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung [1]).

Die Koordinaten eines Punkts x ($x_1 \ldots x_4$) einer Fläche seien gegeben als Funktionen zweier unabhängiger Parameter u_1 und u_2:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2) \qquad (i = 1 \ldots 4).$$

Sind X_i die Koordinaten der Tangentialebene im Punkt x, so gilt

(1) $$\Sigma x X = 0.$$

Für alle Punkte und Ebenen der Fläche, welche der Fundamentalfläche nicht angehören, hat man nach (II)

(2) $$\Sigma x^2 = 1; \quad \Sigma X^2 = 1$$

Der Ausdruck dafür, dass X Tangentialebene und x Berührungspunkt ist, wird:

$$\Sigma x \frac{\partial X}{\partial u_i} = 0; \quad \Sigma X \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Ausserdem folgt aus (2):

(2a) $$\Sigma x \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0; \quad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial u_i} = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

Für das Linienelement erhält man:

(3) $$ds^2 = \Sigma dx^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2} du_2\right)^2 = \Sigma e_{ik} du_i du_k = -\Sigma x d^2 x \qquad (i, k = 1, 2)$$

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung e_{11}, e_{12}, e_{22} sind definiert durch:

(4) $$e_{ik} = e_{ki} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_k} = -\Sigma x \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \cdot \partial u_k}$$

Der Winkel dS zweier konsekutiver Tangentialebenen wird:

$$dS^2 = \Sigma E_{ik} \cdot du_i \cdot du_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

wobei

(4a) $$E_{ik} = E_{ki} = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_k} = -\Sigma X \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Wir setzen ferner

$$\delta = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

1) Stahl-Kommerell, Grundformeln § 1 u. 2.

oder, wenn man bloss eine Vertikalreihe ohne Indices schreibt:

$$(5) \qquad \delta = \left| X\ x\ \frac{\partial x}{\partial u_1}\ \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|; \text{ und } \Delta = \left| x\ X\ \frac{\partial X}{\partial u_1}\ \frac{\partial X}{\partial u_2} \right|$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (2) (2a) und (4) ist:

$$(5a) \qquad \delta^2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix} = |\, e_{ik} \,| \,.$$

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} = |\, E_{ik} \,| \,.$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung d_{11}, d_{12}, d_{22} sind definiert durch:

$$(6)\ d_{ik} = d_{ki} = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \,.\, \partial u_k} = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_k} = -\Sigma \frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_k} = \Sigma x \,.\, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_k}.$$

(i, k = 1, 2)

Die Grössen d und alle in ihnen gebildeten Ausdrücke sind hienach in sich dualistisch.

Ferner ist

$$(7) \begin{cases} \Sigma dx \dfrac{\partial X}{\partial u_i} = \Sigma dX \dfrac{\partial x}{\partial u_i} = -\,(d_{i1} du_1 + d_{i2} du_2) \\ \Sigma X d^2 x = -\Sigma dX dx = \Sigma x d^2 X = \Sigma d_{ik} du_i du_k = L \quad (i, k = 1, 2) \end{cases}$$

$$(8) \qquad \delta \,.\, \Delta = \left| X\ x \frac{\partial x}{\partial u_1}\ \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| \cdot \left| x\ X \frac{\partial X}{\partial u_1}\ \frac{\partial X}{\partial u_2} \right| = -\begin{vmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = -\,|d_{ik}|.$$

Man kann stets die Ebenenkoordinaten X durch die Punktkoordinaten x und ihre Differentiale darstellen.

Aus den Gleichungen (2):

$$\Sigma X x = 0;\ \Sigma X \frac{\partial x}{\partial u_1} = 0;\ \Sigma X \frac{\partial x}{\partial u_2} = 0 \quad \text{folgt, dass sich}$$

die Koordinaten X verhalten wie die Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_1} & \dfrac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_3}{\partial u_2} & \dfrac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{matrix}$$

Setzt man μX_1 gleich der Determinante, gebildet aus den drei letzten Vertikalreihen und trägt diesen Wert in (5) ein, so findet man den Proportionalitätsfaktor $\mu = \delta$;

daher ist

$$(9) \qquad \delta \cdot X_1 = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

Ferner lassen sich die ersten Differentiale der X durch die Punktkoordinaten und ihre Differentiale darstellen.

Aus den 4 Gleichungen (2a) und (6)

$$\Sigma X \frac{\partial X}{\partial u_i} = 0; \Sigma x \frac{\partial X}{\partial u_i} = 0; \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i} = -d_{1i}; \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_i} = -d_{2i}$$

folgt

$$\frac{\partial X_1}{\partial u_1} \cdot \left| X \; x \; \frac{\partial x}{\partial u_1} \; \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| = \begin{vmatrix} 0 & X_2 & X_3 & X_4 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -d_{1i} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ -d_{2i} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die Determinante rechts mit

$$1 = \frac{1}{\delta \cdot X_1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ 0 & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

so erhält man nach einigen Umformungen:

$$\delta^2 \cdot \frac{\partial X_1}{\partial u_i} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ d_{1i} & e_{11} & e_{12} \\ d_{2i} & e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

Setzt man noch

$$\delta^2 \cdot \rho_{i1} = -\begin{vmatrix} d_{i1} & e_{12} \\ d_{i2} & e_{22} \end{vmatrix}; \quad \delta^2 \cdot \rho_{i2} = \begin{vmatrix} d_{i1} & e_{11} \\ d_{i2} & e_{12} \end{vmatrix},$$

so wird:

$$(10) \qquad \frac{\partial X_m}{\partial u_i} = \sum_k \rho_{ik} \frac{\partial x_m}{\partial u_k} \qquad (k = 1,2)$$

$$dX_m = \sum_i \frac{\partial X_m}{\partial u_i} du_i = \sum_i \rho_{ik} \frac{\partial x_m}{\partial u_k} \cdot du_i \qquad (i, k = 1, 2)$$

(für m = 1, 2 . . 4).

Hieran schliesst sich eine Darstellung der Grössen E durch die e und d:

Nach (4a) und (10) ist:

$$E_{ik} = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial u_k} = \Sigma \rho_{ia} \cdot \rho_{kb}\, e_{ab} \qquad (a, b = 1, 2)$$

$$(11) \qquad = -\frac{1}{\delta^2} \begin{vmatrix} 0 & d_{1i} & d_{2i} \\ d_{1k} & e_{11} & e_{12} \\ d_{2k} & e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

Wir führen zur Abkürzung die Grössen h, k und die dualistischen H, K durh folgende Gleichungen ein [1]):

$$(12) \quad \begin{aligned} \delta^2 \cdot h &= e_{11}d_{22} + e_{22}d_{11} - 2e_{12}d_{12}; \quad \delta^2 \cdot k = |\, d_{ik}\,| \\ \Delta^2 \cdot H &= E_{11}d_{22} + E_{22}d_{11} - 2E_{12}d_{12}; \quad \Delta^2 \cdot K = |\, d_{ik}\,| . \end{aligned}$$

Dann wird:

$$(13) \quad \begin{cases} E_{ik} = d_{ik} \cdot h - e_{ik} \cdot k; \qquad e_{ik} = d_{ik} \cdot H - E_{ik} \cdot K \\ e_{11}E_{22} + e_{22}E_{11} = 2e_{12}E_{12} = \delta^2(h^2 - 2k) = \Delta^2(H^2 - 2K). \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{k}{K} = \dfrac{\Delta^2}{\delta^2}; \\ k \cdot K = \dfrac{|\, d_{ik}\,|^2}{\delta^2 \cdot \Delta^2} = 1 \qquad \text{(Gl. 8)} \end{cases}$$

Für das Linien- und Winkelelement bekommt man den Ausdruck (cf. Gl. 3 und 7.):

$$(15) \qquad dS^2 = h \cdot L - k \cdot ds^2; \qquad ds^2 = H \cdot L - K \cdot dS^2.$$

Durch Elimination von ds^2:

$$dS^2(1 - k \cdot K) = L(h - k \cdot H).$$

Da nach (14) $1 - kK = 0$; so folgt:

$$L\,(h - k \cdot H) = 0.$$

Falls also $L \gtrless 0$, wird:

$$(15a) \qquad H = \frac{h}{k}; \qquad h = \frac{H}{K}.$$

Man kann endlich die zweiten Differentialquotienten der Grössen x durch die ersten darstellen; hiezu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(16) \qquad m_{p,\,qr} = m_{p,\,rq} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_q \partial u_r} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_q}.$$

$$(16a) \qquad m_{pq,\,rs} = m_{qp,\,sr} = \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u_p \partial u_q} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}.$$

1) Die geometrische Bedeutung dieser Grössen s. unten § 2 (27).

Aus $$e_{pq} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_q}$$ folgt:

(17) $$\frac{\partial e_{pq}}{\partial u_r} = m_{p,\,q\,r} + m_{q,\,p\,r}.$$

Durch Kombination der entsprechenden Gleichungen:

(18) $$m_{p,\,qr} = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial e_{pq}}{\partial u_r} + \frac{\partial e_{pr}}{\partial u_q} - \frac{\partial e_{qr}}{\partial u_p}\right\}.$$

$m_{p,\,qr}$ ist also bloss von den Grössen e abhängig.

Nun ist nach Gleichung (6) und (9):

$$d_{ik} = \frac{1}{\delta}\left|\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k}\right| \times \frac{\partial x}{\partial u_i}\,\frac{\partial x}{\partial u_k}\Big|$$

Multipliziert man dies mit dem Wert von X_1 Gleichung (9): also mit

$$X_1 = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_4}{\partial u_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_4}{\partial u_2} \end{vmatrix}$$

so erhält man:

$$X_1 d_{ik} = \frac{1}{\delta^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \cdot \partial u_k} & -e_{ik} & m_{1,\,ik} & m_{2,\,ik} \\ x_1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & 0 & e_{11} & e_{12} \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & 0 & e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

Setzt man

(19) $$\delta^2 \cdot p_{1,\,ik} = -\begin{vmatrix} m_{1,\,ik} & e_{12} \\ m_{2,\,ik} & e_{22} \end{vmatrix};\quad \delta^2 \cdot p_{2,\,ik} = \begin{vmatrix} m_{1,\,ik} & e_{11} \\ m_{2,\,ik} & e_{12} \end{vmatrix},$$

so findet man:

(20) $$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u_i \cdot \partial u_k} = d_{ik} \cdot X_1 - e_{ik} \cdot x_1 - \sum_a p_{a,\,ik} \frac{\partial x_1}{\partial u_a} \qquad (a = 1, 2)$$

$$= d_{ik} \cdot X_1 - e_{ik} \cdot x_1 - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ m_{1,\,ik} & e_{11} & e_{12} \\ m_{2,\,ik} & e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

§ 2. Besondere Kurven auf der Fläche [1]).

Durch eine Relation zwischen den Parametern

$$\varphi(u_1, u_2) = 0$$

ist eine Flächenkurve bestimmt. Denkt man sich die Fläche in Ebenenkoordinaten gegeben, so bedeutet $\varphi(u_1, u_2) = 0$ die Gesamtheit der Ebenen, welche die Fläche in den Punkten der Kurve berühren. Man kann daher die Relation $\varphi(u_1, u_2) = 0$ ebenso wohl als Flächenkurve wie als abwickelbare Fläche auffassen.

Hält man u_2 konstant, so ist u_1 allein variabel; die so definierte Flächenkurve heisst die Parameterkurve u_1.

Für den Winkel zweier Kurvenelemente ds und δs, deren Richtungen durch die Quotienten $du_1 : du_2$ u. $\delta u_1 : \delta u_2$ bestimmt sind, ist nach (VI):

$$(1) \quad \cos(ds, \delta s) = \frac{\Sigma dx \,.\, \delta x}{ds \,.\, \delta s} = \frac{1}{ds \,.\, \delta s} \,.\, \Sigma e_{ik} \,.\, du_i \delta u_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

dabei ist

$$ds^2 = \Sigma e_{ik} du_i du_k; \quad \delta s^2 = \Sigma e_{ik} \delta u_i \delta u_k \qquad (i, k = 1, 2)$$

Die Bedingung dafür, dass die beiden Kurvenelemente auf einander senkrecht stehen, ist

$$(2) \qquad \Sigma e_{ik} \,.\, du_i \,.\, \delta u_k = 0.$$

Um den Winkel v_1 einer Richtung ds mit der Parameterkurve u_1 zu erhalten, hat man in (1) $\delta u_2 = 0$ zu setzen:

$$(3) \quad \cos v_1 = \frac{1}{ds\sqrt{e_{11}}} \Sigma e_{1i} du_i; \quad \cos v_2 = \frac{1}{\sqrt{e_{22}}} \Sigma e_{2i} du_i \quad (i = 1, 2)$$

Für den Winkel v_{12} der beiden Parameterkurven ist also

$$\cos v_{12} = \frac{e_{12}}{\sqrt{e_{11} \,.\, e_{22}}}; \quad \sin v_{12} = \frac{\delta}{\sqrt{e_{11} \,.\, e_{22}}}; \quad \text{tang } v_{12} = \frac{\delta}{e_{12}}.$$

Wo die Parameterkurven senkrecht stehen, ist

$$(4) \qquad e_{12} = 0.$$

I. Minimallinien [2]).

Die Minimallinien oder Linien von der Länge Null sind definiert durch die Gleichung:

$$ds^2 = \Sigma e_{ik} du_i du_k = 0.$$

1) Grundformeln § 3. 4. 5.
2) Grundformeln § 3.

Die Bedingung dafür, dass die Parameterkurven Minimallinien sind, ist

$$e_{11} = 0;\ e_{22} = 0.$$

Das Linienelement lässt sich auf die Form bringen:

$$ds^2 = \lambda^2 (d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Durch $d\alpha = 0;\ d\beta = 0$ wird auf der Fläche ein sogenanntes isometrisches Koordinatensystem bestimmt. Die Parameterkurven u_1 und u_2 bilden selbst ein isometrisches System, falls

$$\frac{\partial^2 \log e_{11}}{\partial u_1 \,.\, \partial u_2} = \frac{\partial^2 \log e_{22}}{\partial u_1 \,.\, \partial u_2}.$$

II. Geodätische Linien[1]).

Die geodätischen Linien seien zunächst definiert als die kürzesten Linien zwischen zwei Flächenpunkten.

Erste Ableitung der Differentialgleichung: Die Gleichung der Fläche sei gegeben in der Form:

$$f(x_1 \ldots x_4) = 0.$$

Gesucht ist auf der Fläche eine solche Kurve $x_i = \varphi_i\,(t)$, dass die erste Variation des Bogens s verschwindet, also dass:

$$\delta \int_{t_0}^{t} s' \,.\, dt = \delta \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma x'^2}\ .\, dt = 0;\ \text{wobei gesetzt ist:}$$

$$s' = \frac{ds}{dt};\ x' = \frac{dx}{dt};\ s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}\ \text{u. s. w.}$$

Daneben gelten die Bedingungsgleichungen:

$$f = 0;\ \psi = \Sigma x^2 - 1 = 0.$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Omega}{\partial x_i'}\right) \qquad (i = 1, \ldots 4)$$

wo $$\Omega = s' + \mu \,.\, f + \nu \,.\, \psi.$$

Es folgt:

$$\mu \frac{\partial f}{\partial x_i} + 2\,\nu \,.\, x_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{x_i'}{s_i'}\right) = \frac{s' x_i'' - s'' x_i}{(s')^2}. \tag{6}$$

Für $t = s$ ist $s' = 1;\ s'' = 0$; also:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 2\,\nu \,.\, x_i + \mu \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2 \ldots 4) \tag{6a}$$

1) Grundformeln § 4.

Die Koordinaten y_i eines Punktes der (durch 3 konsekutive Punkte gehenden) Schmiegungsebene einer Kurve $x_i = \varphi_i(t)$ sind nach (VIIa):

$$y_i = kx_i + k_1 x_i' + k_2 x_i''$$

Für eine geodätische Linie und $t = s$ ist nach (6a):

$$y_i = \lambda x_i + \lambda_1 x_i' + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{6b}$$

Hieraus folgt: die Schmiegungsebene der geodätischen Linie ist Normalebene der Fläche. Denn die Normale der Fläche im Punkt x_i ist Verbindungslinie des Punktes x_i mit dem Pol der Tangentialebene von x_i in Beziehung auf die Fundamentalfläche. Die Koordinaten dieses Pols sind proportional $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, also ist ein Punkt y_i der Normalen (VIII)

$$y_i = \mu x_i + \mu_1 \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Die Punkte der Normalen liegen somit, wie die Vergleichung mit (6b) zeigt, in der Schmiegungsebene der geodätischen Linie.

Umgekehrt lässt sich die geodätische Linie als eine Flächenkurve definieren, deren Schmiegungsebene die Flächennormale enthält (d. h. Normalebene der Fläche ist). Dies führt zur Differentialgleichung der geodätischen Linien in den Parametern u_1 und u_2. Die Koordinaten eines Punkts der Schmiegungsebene kann man schreiben:

$$y_i = \lambda x_i + \lambda_1 dx_i + \lambda_2 d^2 x_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Die Koordinaten eines Punktes der Flächennormale sind nach (VIII):

$$y_i = \mu x_i + \mu_1 X_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Daraus folgt als Bedingung, dass die Flächennormale in die Schmiegungsebene fällt:

$$kX_i + k_1 x_i + k_2 dx_i + k_3 d^2 x_i = 0 \qquad (i = 1 \ldots 4) \tag{7}$$

Durch Elimination der Faktoren k ergiebt sich als Differentialgleichung der geodätischen Linie

$$N = | X \; x \; dx \; d^2 x | = 0. \tag{8}$$

Multipliziert man N mit $\delta = | X \; x \; \frac{\partial x}{\partial u_1} \; \frac{\partial x}{\partial u_2} |$, so erhält man N in den Grössen u_i ausgedrückt:

$$(9) \qquad N \,.\, \delta = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_1} dx & \Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u_1} d^2 x \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_2} dx & \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_2} d^2 x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_i e_{1i} du_i & \sum_i e_{1i} d^2 u_i + \sum_{i,k} m_{1,ik} du_i du_k \\ \sum_i e_{2i} du_i & \sum_i e_{2i} d^2 u_i + \sum_{i,k} m_{2,ik} du_i du_k \end{vmatrix} \quad (i, k = 1, 2).$$

Multipliziert man N in Gleichung (8) mit sich selbst, so erhält man [cf. (XII) und (XIII) u. § 1 (7)]:

$$(10) \qquad N^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & L \\ 0 & s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ 0 & s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ L & s_{20} & s_{21} & s_{22} \end{vmatrix} = S^{(2)} - L^2 \,.\, S^{(1)}.$$

oder:

$$N^2 = ds^2 \left\{ \Sigma (d^2 x)^2 - (d^2 s)^2 - ds^4 - L^2 \right\}.$$

Zweite Ableitung. Die Fläche sei in Parameterdarstellung, also die Koordinaten x_i als Funktionen der Parameter $(u_1\ u_2)$ gegeben. Eine Kurve auf der Fläche ist bestimmt durch zwei Gleichungen $u_1 = f_1(t)$; $u_2 = f_2(t)$, wo t ein beliebiger Parameter ist. Die Bedingung, dass die Kurve kürzeste Linie ist zwischen den Punkten t_0 und t, wird ausgedrückt durch das Verschwinden der ersten Variation der Bogenlänge s, also

$$\delta s = \delta \int_{t_0}^{t} s' \,.\, dt = \delta \int_{t_0}^{t} \sqrt{\Sigma e_{ik} \,.\, u_i' \,.\, u_k'} \,.\, dt = 0.$$

Man erhält die Gleichungen:

$$\frac{\partial s'}{\partial u_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial s'}{\partial u_a'}\right) = 0 \qquad (a = 1, 2)$$

oder

$$\frac{1}{2s'} \sum_{i,k} \frac{\partial e_{ik}}{\partial u_a} \,.\, u_i' \,.\, u_k' - \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i e_{ai} \,.\, u_i'}{s'}\right) = 0 \quad (i, k = 1, 2)$$

oder entwickelt:

$$\frac{s''}{s'} \sum_i e_{ai} u_i' + \sum_{i,k} m_{a,ik} \,.\, u_i' u_k' + \sum_i e_{ai} u_i'' = 0 \qquad (i, k = 1, 2).$$

Durch Elimination von $\frac{s''}{s'}$ aus den beiden, für a = 1 u. 2 gebildeten Gleichungen folgt:

$$\delta \,.\, N = 0. \qquad \text{(cf. Gl. 9)}$$

III. Konjugierte Richtungen [1]).

K o n j u g i e r t heissen zwei von einem Punkt $(u_1\ u_2)$ der Fläche ausgehende Linienelemente ds′ und ds″, wenn die Tangentialebenen in den Endpunkten des einen Linienelements sich in der Richtung des andern schneiden.

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt x der Fläche ist; wenn ξ laufende Punktkoordinaten sind

$$\Sigma\,\xi\,X = 0.$$

Dabei ist identisch $\Sigma Xx = 0$.

Für die Tangentialebene im Endpunkt (x + dx′) des Linienelements ds′ ist

$$\Sigma\,\xi\,(X + dX') = 0.$$

Für den Schnitt beider Ebenen gilt:

$$\Sigma\xi X = 0;\quad \Sigma\xi dX' = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass auf dieser Schnittlinie der Endpunkt x + dx″ des Linienelements ds″ liegt, ist

$$\Sigma dX' \,.\, dx'' = 0$$

oder in den Grössen u_i ausgedrückt nach § 1 (6):

(11) $$\Sigma d_{ik} \,.\, du_i' \,.\, du_k'' = 0. \qquad (i,\ k = 1,\ 2)$$

Aus der Definition der konjugierten Richtungen und aus der Form ihrer Differentialgleichung erhellt, dass sie in sich dualistisch sind.

Sollen die beiden Parameterkurven konjugiert sein, so hat man für die eine $du_1' = 0$, für die andere $du_2'' = 0$ in (11) einzusetzen; es folgt:

(12) $$d_{12} = 0.$$

Aus (11) folgt, wenn λ ein Proportionalitätsfaktor:

$$du_1'' = \lambda(d_{21}du_1' + d_{22}du_2');\quad du_2'' = -\lambda\,(d_{11}du_1' + d_{12}du_2').$$

Setzt man diese Werte in (1) ein, so erhält man als Winkel v zweier konjugierter Richtungen ds′ und ds″:

(13)
$$\cos v = \frac{\lambda}{ds'ds''}\begin{vmatrix} e_{11}du_1' + e_{12}du_2' & d_{11}du_1' + d_{12}du_2' \\ e_{21}du_1' + e_{22}du_2' & d_{21}du_1' + d_{22}du_2' \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\lambda \,.\, K}{ds'ds''}\begin{vmatrix} E_{11}du_1' + E_{12}du_2' & d_{11}du_1' + d_{12}du_2' \\ E_{21}du_1' + E_{22}du_2' & d_{21}du_1' + d_{22}du_2' \end{vmatrix}$$

[cf. § 1 (13)].

1) Grundformeln § 5.

IV. Asymptotenlinien [1]).

Fallen zwei konjugierte Linienelemente zusammen, so hat man das Element einer Asymptotenlinie. Ihre Differentialgleichung erhält man, indem man in (11) $du' = du'' = du$ setzt:

(14) $$L = \Sigma d_{ik} du_i du_k = 0. \qquad (i, k = 1, 2)$$

Die Asymptotenlinien sind in sich dualistisch. Durch jeden Flächenpunkt gehen zwei Asymptotenlinien.

Die Parameterkurven sind Asymptotenlinien, wenn

(15) $$d_{11} = 0;\ d_{22} = 0.$$

Zur Differentialgleichung der Asymptotenlinien gelangt man auch, wenn man die Bedingung dafür aufstellt, dass die Schmiegungsebene einer Flächenkurve Tangentialebene der Fläche ist. Die Gleichung letzterer lautet:

$$\Sigma X\xi = 0.$$

Sollen die drei konsekutiven Punkte x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ einer Flächenkurve auf dieser Ebene liegen, so muss sein:

$$\Sigma Xx = 0;\ \Sigma X dx = 0;\ \Sigma X d^2x = 0.$$

Das Differential der zweiten Gleichung liefert

$$\Sigma X d^2x + \Sigma dX dx = 0;\quad \text{also ist auch:}$$

$$0 = \Sigma dX dx = -L.$$

Der Winkel v zwischen den zwei durch einen Punkt gehenden Asymptotenlinien ergiebt sich aus

$$\cos v = \frac{e_{11}d_{22} + e_{22}d_{11} - 2e_{12}d_{12}}{\sqrt{(e_{11}d_{22} + e_{22}d_{11} - 2e_{12}d_{12})^2 - 4(e_{11}e_{22} - e_{12}^2)(d_{11}d_{22} - d_{12}^2)}}$$

$$= \frac{h}{\sqrt{h^2 - 4k}} = \frac{H}{\sqrt{H^2 - 4K}}. \qquad [\S\ 1\ (12\ \text{ff.})]$$

Nun ist, wenn r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche im Punkt x sind (s. unten Gleichung 27):

$$h = \operatorname{cotg} r_1 + \operatorname{cotg} r_2;\ \sqrt{h^2 - 4k} = \operatorname{cotg} r_1 - \operatorname{cotg} r_2$$

also

$$\cos v = \frac{\operatorname{cotg} r_1 + \operatorname{cotg} r_2}{\operatorname{cotg} r_1 - \operatorname{cotg} r_2}$$

Für eine Kurve, längs deren die Asymptotenlinien sich rechtwinklig durchschneiden, ist:

$$e_{11}d_{22} + e_{22}d_{11} - 2e_{12}d_{12} = 0.$$

1) Grundformeln § 5.

V. Krümmungslinien [1]).

1. Definition: Krümmungslinien heissen diejenigen konjugierten Kurvensysteme, welche sich senkrecht durchschneiden. Demnach ist ihre Differentialgleichung (Gleichung (13); cos v = 0):

$$\begin{vmatrix} e_{11}du_1 + e_{12}du_2 & d_{11}du_1 + d_{12}du_2 \\ e_{21}du_1 + e_{22}du_2 & d_{21}du_1 + d_{22}du_2 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{oder}$$

(16)

$$\begin{vmatrix} E_{11}du_1 + E_{12}du_2 & d_{11}du_1 + d_{12}du_2 \\ E_{21}du_1 + E_{22}du_2 & d_{21}du_1 + d_{22}du_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Differentialgleichung ist vom zweiten Grad in Beziehung auf $du_1 : du_2$, also gehen im allgemeinen durch jeden Punkt zwei Krümmungslinien.

Die Differentialgleichung lässt sich auch schreiben:

(17)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(ds^2)}{\partial u_1} & \frac{\partial L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial(ds^2)}{\partial u_2} & \frac{\partial L}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0; \text{ oder } \begin{vmatrix} \frac{\partial(dS^2)}{\partial u_1} & \frac{\partial L}{\partial u_1} \\ \frac{\partial(dS^2)}{\partial u_2} & \frac{\partial L}{\partial u_2} \end{vmatrix} = 0.$$

$(i = 1, 2)$

Sucht man die Bedingung, dass die Parameterkurven Krümmungslinien sind, so hat man auszudrücken, dass sie konjugiert sind und senkrecht stehen, daher nach (4) und (12):

(18) $$e_{12} = 0; \quad d_{12} = 0.$$

2. Definition. Krümmungslinien sind diejenigen Flächenkurven, längs deren die konsekutiven Normalen sich schneiden.

Nach (VIII) sind die Koordinaten y_i eines Punkts der Flächennormale

(19) $$y_i = \mu x_i + \lambda X_i. \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Die Entfernung r der Punkte x und y bestimmt sich aus:

$$\cos r = \Sigma yx = \mu\Sigma x^2 + \lambda\Sigma xX = \mu$$
$$\sin r = \Sigma yX = \mu\Sigma xX + \lambda\Sigma X^2 = \lambda$$

also ist

$$\operatorname{tang} r = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Sollen y_i die Koordinaten des Schnittpunkts zweier konsekutiver

1) Grundformeln § 5.

Normalen sein, so hat man bei der Differentiation von (19) die Grösse y_i als konstant anzusehen; daher

(20) $$0 = \mu dx_i + \lambda dX_i + x_i d\mu + X_i d\lambda \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Diese Gleichungen mit x_i resp. X_i multipliziert und addiert, liefern:

$$d\mu = 0;\ d\lambda = 0;\ \text{daher } dr = 0;$$

d. h. r ist der zur Richtung der betrachteten Krümmungslinie gehörige Krümmungsradius und y_i der Mittelpunkt des Krümmungskreises.

Durch Elimination der Faktoren λ, μ und ihrer Differentialien aus (20) ergiebt sich:

(21) $$M = | x\ X\ dx\ dX | = 0.$$

Die Multiplikation dieser Determinante mit

$$\delta = | X\ x\ \frac{\partial x}{\partial u_1}\ \frac{\partial x}{\partial u_2} |$$

führt auf die Gleichung:

(22) $$M = \frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} \Sigma e_{1i} du_i & \Sigma d_{1i} du_i \\ \Sigma e_{2i} du_i & \Sigma d_{2i} du_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \Sigma E_{1i} du_i & \Sigma d_{1i} du_i \\ \Sigma E_{2i} du_i & \Sigma d_{2i} du_i \end{vmatrix}$$

Die Gleichung (21) ist daher nach (22) wieder die Differentialgleichung der Krümmungslinien. Zugleich erhellt aus (21), dass die Krümmungslinien in sich dualistisch sind.

Multipliziert man M in (21) mit sich selbst, so folgt:

(23) $$M^2 = | x\ X\ dx\ dX |^2 = ds^2 . dS^2 - L^2.$$

Dualistische Betrachtung: Der Flächennormale entspricht als dualistisches Gebilde die Schnittgerade G der Tangentialebene X mit der Polarebene des Punkts x. Die Koordinaten Y_i irgend einer durch die Gerade G gehenden Ebene sind:

$$Y_i = \lambda' x_i + \mu' X_i. \qquad (i = 1, 2 \ldots 4)$$

Der Winkel φ der Ebenen Y_i und X_i bestimmt sich aus:

$$\cos \varphi = \Sigma Y_i X_i = \Sigma \lambda' X_i x_i + \mu' \Sigma X_i^2 = \mu'$$
$$\sin \varphi = \Sigma Y_i x_i = \Sigma \lambda' x_i^2 + \mu' \Sigma x_i X_i = \lambda'$$
$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\lambda'}{\mu'}.$$

Sollen Y_i die Koordinaten der Ebene zweier konsekutiver Geraden G sein, so hat man bei der Differentiation Y_i konstant zu lassen:

$$0 = \lambda' dx_i + \mu' dX_i + x_i d\lambda' + X_i d\mu'$$

wie oben findet man

$$d\varphi = 0.$$

Dem Krümmungskreis entspricht dualistisch ein gewisser Kegel (Krümmungskegel). Sämtliche Tangentialebenen desselben bilden mit der Ebene Y_i den konstanten Winkel φ (Krümmungswinkel).

Durch Elimination der λ', μ' und ihrer Differentialien gelangt man wieder zur Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$M = | x\ X\ dx\ dX | = 0.$$

Wir kehren zurück zu Gleichung (20). Da $d\lambda = d\mu = 0$ ist, so gilt

(24) $\mu dx_i + \lambda dX_i = 0$; oder $dx_i + \text{tang r} \cdot dX_i = 0$. $(i = 1 \ldots 4)$

Multipliziert man diese Gleichungen mit $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ resp. $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ und addiert von $i = 1 \ldots 4$, so folgt:

$$(25) \quad \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_1} dx + \text{tang r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot dX = 0 \\ \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_2} dx + \text{tang r} \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_2} dX = 0 \end{aligned}$$

oder:

$$(25a) \quad \begin{aligned} \Sigma e_{1i} du_i + \text{tang r}\ \Sigma d_{1i} du_i = 0 \\ \Sigma e_{2i} du_i + \text{tang r}\ \Sigma d_{2i} du_i = 0 \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

Durch Elimination von tang r folgt die Differentialgleichung der Krümmungslinien (16).

Dagegen ergiebt die Differentialgleichung der Differentialien du_1 und du_2:

$$(26) \quad 0 = \begin{vmatrix} \text{tang r} \cdot d_{11} - e_{11} & \text{tang r} \cdot d_{12} - e_{12} \\ \text{tang r} \cdot d_{21} - e_{21} & \text{tang r} \cdot d_{22} - e_{22} \end{vmatrix}.$$

Dies ist eine Gleichung zweiten Grads für die Tangenten derjenigen Werte von r, welche zu den beiden Krümmungslinien gehören. Sind tang r_1 und tang r_2 die Wurzeln von (26) (Hauptkrümmungsradien), so nennt man:

$$(27) \quad \text{Das Krümmungsmass } k = \frac{1}{\text{tang } r_1 \cdot \text{tang } r_2}$$

$$= \frac{d_{11} d_{22} - d_{12}^2}{\delta^2} = -\frac{\Delta}{\delta} \qquad [\S\ 1\ (8)]$$

$$\text{die mittlere Krümmung } h = \frac{1}{\text{tang } r_1} + \frac{1}{\text{tang } r_2}$$

$$= \frac{e_{11} d_{22} + e_{22} d_{11} - 2 e_{12} d_{12}}{\delta^2}.$$

Addiert man die mit dx_i multiplizierten Gleichungen (24), so folgt: $\Sigma dx^2 + \text{tang r}\ \Sigma dx dX = 0.$

oder nach § 1 (7)

$$ds^2 - \text{tang } r \,.\, L = 0$$

d. h. der zu einer beliebigen Richtung ds gehörige Krümmungsradius ist gegeben durch

$$\frac{1}{\text{tang } r} = \frac{L}{ds^2}. \tag{28}$$

Eine einfache dualistische Uebertragung führt zu den entsprechenden Funktionen der Hauptkrümmungswinkel φ_1 und φ_2. Es ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} d_{11} \,.\, \text{tang } \varphi - e_{11} & d_{12} \,.\, \text{tang } \varphi - e_{12} \\ d_{21} \,.\, \text{tang } \varphi - e_{21} & d_{22} \,.\, \text{tang } \varphi - e_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{26a}$$

$$K = \frac{1}{\text{tang } \varphi_1 \,.\, \text{tang } \varphi_2} = \frac{d_{11}d_{22} - d_{12}^2}{\Delta^2} = -\frac{\delta}{\Delta} \tag{27a}$$

$$H = \frac{1}{\text{tang } \varphi_1} + \frac{1}{\text{tang } \varphi_2} = \frac{E_{11}d_{22} + E_{22}d_{11} - 2E_{12}d_{12}}{\Delta^2}$$

$$\frac{1}{\text{tang } \varphi} = \frac{L}{dS^2}. \tag{28a}$$

Die übrigen Beziehungen zwischen den Grössen h, k, H, K s. § 1 (12 ff.).

Für Krümmungslinien als Parameterkurven ist $e_{12} = d_{12} = 0$; also wird Gleichung (26):

$(d_{11}\text{tang } r_1 - e_{11})\ (d_{22}\text{tang } r_2 - e_{22}) = 0$; daher

$$\text{tang } r_i = \frac{e_{ii}}{d_{ii}};\ \text{tang } \varphi_i = \frac{E_{ii}}{d_{ii}} \qquad (i = 1, 2). \tag{29}$$

Aus Gleichung (28) ergiebt sich noch eine weitere Herleitung der Krümmungslinien, nämlich der Satz: die Krümmungslinien sind diejenigen Flächenkurven, für welche die Tangenten der Krümmungsradien ein Maximum oder Minimum sind.

Beweis: Wir differenzieren die Gleichung (28)

$$L \text{ tang } r_i = ds^2$$

nach ∂u_i und setzen $\frac{\partial(\text{tang } r_i)}{\partial u_i} = 0$. Man erhält

$$\text{tang } r_i \,.\, \frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{\partial(ds^2)}{\partial u_i} = 0.$$

Durch Elimination von tang r_i aus den beiden für i = 1 u. 2 gebildeten Gleichungen folgt die Differentialgleichung der Krümmungslinien (17), während die Elimination der du_i wieder zur Gleichung der Hauptkrümmungsradien führt.

§ 3. Krümmungsmass. Indikatrix.

„Das Krümmungsmass k (K) ist nur von den Fundamentalgrössen erster Ordnung e (E) und ihren Ableitungen; d. h. von den Koeffizienten des Linienelements (Winkelelements) abhängig."

Beweis: Nach § 1 (6) und (9) ist

$$d_{ik} = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \left| \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} \; x \; \frac{\partial x}{\partial u_1} \; \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|.$$

Nach § 1 (16) und (16a):

$$d_{11} \cdot d_{22} = \frac{1}{\delta^2} \begin{vmatrix} m_{11,22} & -e_{11} & m_{1,11} & m_{2,11} \\ -e_{22} & 1 & 0 & 0 \\ m_{1,11} & 0 & e_{11} & e_{12} \\ m_{2,11} & 0 & e_{21} & e_{22} \end{vmatrix}$$

In dem Ausdruck rechts sind alle Grössen ausser $m_{11,22}$ Funktionen der e_{ik}. Man kann daher setzen:

$$d_{11} d_{22} = m_{11,22} + \varphi(e)$$
$$d_{12}^2 = m_{12,12} + \psi(e)$$

dabei sind φ und ψ Funktionen der e und ihrer Ableitungen. Nun ist

$$k \cdot \delta^2 = d_{11} d_{22} - d_{12}^2 = m_{11,22} - m_{12,12} + f(e).$$

Um zu beweisen, dass k bloss von den Grössen e abhängig, genügt es, zu zeigen, dass die Differenz $m_{11,22} - m_{12,12}$ diese Eigenschaft hat.

Führt man noch die Bezeichnung ein

$$m_{p,qrs} = \Sigma \frac{\partial x}{\partial u_p} \cdot \frac{\partial^3 x}{\partial u_q \partial u_r \partial u_s}, \text{ so ist nach § 1 (17)}$$

$$\frac{\partial e_{pq}}{\partial u_r} = m_{p,qr} + m_{q,pr}; \qquad \text{differenziert:}$$

$$\frac{\partial^2 e_{pq}}{\partial u_r \partial u_s} = m_{p,qrs} + m_{q,prs} + m_{pr,qs} + m_{ps,qr}.$$

Insbesondere ist:

$$\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} = m_{1,122} + m_{2,112} + m_{11,22} + m_{12,12}$$

$$\frac{\partial^2 e_{11}}{(\partial u_2)^2} = 2\,(m_{1,122} + m_{12,12})$$

$$\frac{\partial^2 e_{22}}{(\partial u_1)^2} = 2\,(m_{2,112} + m_{12,12}).$$

Die beiden letzten Gleichungen von der doppelten ersten abgezogen:

$$2\,(m_{11,\,22} - m_{12,\,12}) = 2\,\frac{\partial^2 e_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{\partial^2 e_{11}}{(\partial u_2)^2} - \frac{\partial^2 e_{22}}{(\partial u_1)^2}.$$

Indikatrix[1]).

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkt x ist, wenn y laufende Punktkoordinaten sind:

$$\Sigma X y = 0.$$

Die Gleichung einer Ebene mit dem unendlich kleinen Abstand ε von der Tangentialebene ist nach Einl. (IXa):

(1) $$\Sigma X y = \sin \varepsilon = \varepsilon.$$

Die Schnittpunkte y dieser Ebene und der Fläche sind dem Punkt x unendlich benachbart; für sie gilt die Entwicklung:

$$y_m = x_m + \Sigma_i \frac{\partial x_m}{\partial u_i} du_i + \Sigma_{i,k} \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_k} du_i du_k + \ldots$$

$$(m = 1 \ldots 4;\ i,\ k = 1, 2).$$

Dies in (1) eingesetzt, giebt:

$$\varepsilon = \Sigma_x X x + \Sigma_i du^i \Sigma_x X \frac{\partial x}{\partial u_i} + \Sigma_{i,k} du_i du_k \Sigma_x X \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} + \ldots$$

Da $\Sigma X x = 0$; $\Sigma X \frac{\partial x}{\partial u_i} = 0$; $\Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = d_{ik}$, so hat man:

$$\varepsilon = \Sigma d_{ik} du_i du_k = L. \qquad (ik = 1, 2)$$

Wählt man die Krümmungslinien als Parameterkurven, so ist nach § 2 (18) und (29):

$$d_{12} = 0;\ \operatorname{tgr}_i = \frac{e_{ii}}{d_{ii}};\ \text{also}$$

$$\varepsilon = \Sigma_i \frac{e_{ii}}{\operatorname{tgr}_i} \cdot du_i^2. \qquad (i = 1, 2)$$

Das Bogenelement ξ_i auf der Parameterkurve ist

$$\xi_i^2 = e_{ii} du_i^2;$$

Als Gleichung der Indikatrix hat man also die Kurve zweiter Ordnung:

$$\varepsilon = \Sigma \frac{\xi_i^2}{\operatorname{tang} r_i} \qquad (i = 1, 2)$$

deren Axen in die Richtung der Krümmungslinien fallen und den Tangenten der Hauptkrümmungsradien proportional sind.

1) Grundformeln § 5 (23).

§ 4. Die allgemeine Raumkurve[1]).

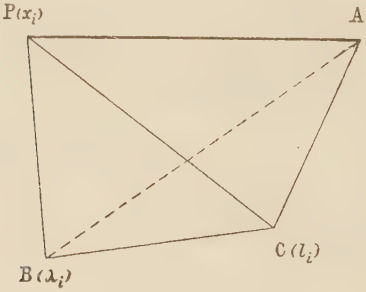
In jedem Punkt P einer Raumkurve hat man drei ausgezeichnete, auf einander senkrecht stehende Ebenen:

1. Die Normalebene (PBC) mit den Koordinaten α_i geht durch den Punkt $P(x_i)$ und steht senkrecht auf der Tangente PA, der Verbindungslinie der Punkte x und $x + dx$.

2) Die Schmiegungsebene (PCA), mit den Koordinaten λ_i, ist bestimmt durch 3 konsekutive Punkte x, $x + dx$, $x + 2dx + d^2x$ der Kurve.

3. Die rektifizierende Ebene (PAB) mit den Koordinaten l_i, geht durch die Tangente PA und steht senkrecht auf der Schmiegungsebene.

Endlich sei die Ebene ABC die Polarebene des Punktes $P(x_i)$ bezüglich der Fundamentalfläche. Das Tetraeder PABC ist sich selbst konjugiert in Beziehung auf die Fundamentalfläche. Jeder Eckpunkt des Tetraeders ist Pol der gegenüberliegenden Tetraederfläche und hat daher dieselben Koordinaten, wie diese Fläche (Einl. S. 8). Also sind α_i zugleich die Koordinaten des Punkts A, λ_i die des Punkts B, l_i die des Punkts C; und die Ebene ABC hat die Koordinaten x_i. Wie durch den Punkt P 3 aufeinander senkrecht stehende Ebenen gehen, so liegen in der Ebene ABC drei Punkte mit normaler Entfernung.



PA Tangente,
PBC(α_i) Normalebene,
PAC(λ_i) Schmiegungsebene,
PAB(l_i) rektifizierende Ebene,
ABC(x_i) Polarebene von P.

Die Raumkurve kann man sich erzeugt denken durch eine einfach unendliche Reihe von Punkten x, oder durch eine einfach unendliche Reihe von Schmiegungsebenen λ. Die Grössen x und λ

1) Grundformeln § 13.

sind daher dualistisch. Die Tangente der Raumkurve als Verbindungslinie der zwei Punkte x, x + dx, oder als Schnittgerade der zwei Schmiegungsebenen λ, $\lambda + d\lambda$ ist in sich dualistisch. Es fragt sich nur noch, welche Grösse dualistisch ist zur Normalebene α. Letztere geht durch den Punkt x und steht senkrecht auf der Tangente. Das zur Normalebene dualistische Gebilde ist ein Punkt, der in der Schmiegungsebene λ liegt und normale Entfernung von der Tangente hat. Dies ist nichts anderes als Punkt C mit den Koordinaten l_i. Somit sind die Grössen l und α ebenso wie x u. λ dualistisch. Wir können daher aus jeder Formel eine neue ableiten, indem wir x mit λ und zugleich α mit l vertauschen. Dies zeigt sich sogleich, wenn man ausdrückt, dass die 3 Ebenen α, λ, l senkrecht auf einander stehen und durch den Punkt x gehen:

$$\Sigma \alpha x = 0; \quad \Sigma l \lambda = 0$$
$$\Sigma l x = 0; \quad \Sigma \alpha \lambda = 0$$

(1)
$$\left.\begin{aligned} \Sigma x \lambda &= 0 \\ \Sigma l \alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(in sich dualistisch)}$$

Ausserdem gilt nach (II)

$$\Sigma x^2 = \Sigma \lambda^2 = \Sigma \alpha^2 = \Sigma l^2 = 1.$$

I. Es seien nun die Koordinaten x_i der Punkte der Raumkurve als Funktionen eines Parameters gegeben, und die Grössen α_i, l_i, λ_i als Funktionen dieses Parameters darzustellen.

1) Bestimmung der Koordinaten α_i der Normalebene.

Da die Ebene α_i senkrecht auf der Tangente steht, so geht sie durch die reciproke Polare der Tangente in Beziehung auf die Fundamentalfläche, d. h. durch die Schnittgerade zweier Ebenen mit den Koordinaten x_i, $x_i + dx_i$. Nach (VIIa) ist daher:

$$\alpha_i = \mu x_i + \mu_1 dx_i \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Die Ebene α geht aber auch durch den Punkt x, also

$$\Sigma \alpha x = 0 = \mu s_{00} + \mu_1 s_{01} \qquad \text{(cf. XII)}$$

Daraus folgt, wenn k ein Proportionalitätsfaktor:

$$k \cdot \alpha_i = \begin{vmatrix} x_i & dx_i \\ s_{00} & s_{01} \end{vmatrix}$$

Nach Einl. (XVII) ist:

$$k^2 \Sigma_i \alpha_i^2 = k^2 = S^{(1)} \cdot S^{(0)}; \text{ daher}$$

(2)
$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{S^{(1)} \cdot S^{(0)}}} \cdot \begin{vmatrix} x_i & dx_i \\ s_{00} & s_{01} \end{vmatrix} \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

oder mit Rücksicht auf (XII) und (XIV):

$$\alpha_i = \frac{dx_i}{\sqrt{\Sigma dx_i^2}} = \frac{dx_i}{ds}. \tag{3}$$

Die dualistische Gleichung lautet:

$$l_i = \frac{d\lambda_i}{\sqrt{\Sigma d\lambda_i^2}} = \frac{d\lambda_i}{dw_2} \qquad \text{(s. unten Gl. 7).} \tag{3a}$$

2. Bestimmung der Koordinaten l_i der rektifizierenden Ebene.

Die Ebene l_i steht senkrecht auf der Schmiegungsebene; sie geht also durch den Schnittpunkt der Polarebenen der 3 Punkte x, x + dx, x + 2 dx + d^2x. Nach (VIIa) ist:

$$l_i = \mu x + \mu_1 dx + \mu_2 d^2x. \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Die Ebene l_i geht ferner durch den Punkt x:

$$\Sigma lx = 0 = \mu s_{00} + \mu_1 s_{01} + \mu_2 s_{02}.$$

Ausserdem geht sie durch den Punkt x + dx:

$$\Sigma l dx = 0 = \mu s_{10} + \mu_1 s_{11} + \mu_2 s_{12}; \qquad \text{daraus}$$

$$k\, l_i = \begin{vmatrix} x_i & dx_i & d^2x_i \\ s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \end{vmatrix}$$

Nach Einl. (XVII) wird:

$$k^2 \Sigma_i l_i^2 = k^2 = S^{(2)} . S^{(1)}; \qquad \text{also}$$

$$l_i = \frac{1}{\sqrt{S^{(2)} . S^{(1)}}} \begin{vmatrix} x_i & dx_i & d^2x_i \\ s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ s_{10} & s_{11} & s_{12} \end{vmatrix} \qquad (i = 1 \ldots 4) \tag{4}$$

oder wegen (XII) und (XIV):

$$l_i = \frac{1}{\sqrt{S^{(2)}}} (x_i ds^3 - dx_i d^2s + d^2x_i ds). \tag{4a}$$

3. Bestimmung der Koordinaten λ_i der Schmiegungsebene.

Für die Schmiegungsebene hat man, wenn ξ laufende Punktkoordinaten sind, die Gleichungen:

$$\Sigma \xi \lambda = 0; \quad \Sigma x . \lambda = 0; \quad \Sigma dx . \lambda = 0; \quad \Sigma d^2x . \lambda = 0.$$

Durch Elimination von λ folgt die Gleichung der Schmiegungsebene

$$| \xi \;\; x \;\; dx \;\; d^2x | = 0. \tag{5}$$

Die Koordinaten λ_i verhalten sich wie die Determinanten dritter Ordnung der Matrix:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{matrix}$$

Mit Rücksicht auf $\Sigma\lambda^2 = 1$ und $|\, x\, dx\, d^2x\,|^2 = S^{(2)}$ erhält man nach dem Determinantensatz pag. 5 und Gleichung (VIII):

$$(6) \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{S^{(2)}}} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \end{vmatrix}$$

II. Die beiden Krümmungen der Raumkurve.

Der Winkel zweier konsekutiver Tangenten sei mit dw_1, der zweier konsekutiver Schmiegungsebenen mit dw_2 bezeichnet. Die Grösse dw_1 ist in sich dualistisch, die Grösse dw_2 dualistisch zu ds; also

$$(7) \qquad dw_2^2 = \Sigma d\lambda^2.$$

Man definiert nun[1]) als

$$(8) \quad \begin{cases} \text{erste Krümmung der Raumkurve den Ausdruck } \dfrac{dw_1}{ds} \\ \text{zweite Krümmung (Torsion) . . . . . } \dfrac{dw_2}{ds} \end{cases}$$

Die Grössen dw_1 und dw_2 lassen sich nach Einl. (XVI) leicht in den x und ihren Differentialien darstellen. Für den Winkel dw_1 zweier Tangenten ist in (XVI) $m = 1$, für den Winkel dw_2 zweier Schmiegungsebenen $m = 2$ zu setzen; also:

$$(10) \quad \begin{cases} dw_1^2 = \dfrac{S^{(2)} S^{(0)}}{[S^{(1)}]^2} = \dfrac{S^{(2)}}{ds^4} = \dfrac{\Sigma(d^2x)^2 - (d^2s)^2 - ds^4}{ds^2} \\ dw_2^2 = \dfrac{S^{(3)} \cdot S^{(2)}}{[S^{(1)}]^2} = \Sigma d\lambda^2. \end{cases}$$

Da der Winkel dw_1 in sich dualistisch ist, so muss sein:

$$(11) \qquad dw_1^2 = \frac{\Sigma(d^2x)^2 - (d^2s)^2 - ds^4}{ds^2} = \frac{\Sigma(d^2\lambda)^2 - (d^2w_2)^2 - dw_2^4}{(dw_2)^2}.$$

III. Krümmungsradius der Raumkurve.

Die beiden Krümmungen (8) stehen in Beziehung zu einer Strecke ρ und einem Winkel ψ. Wir betrachten einen Kreis, den Krümmungskreis (Radius ρ), der durch drei konsekutive Punkte der

1) Killing, l. c. pag. 189.

Raumkurve geht, und dessen Mittelpunkt (Koordinaten y_i) in der Schmiegungsebene liegen. Es ist

$$\cos\rho = \Sigma yx; \quad 0 = \Sigma y dx; \quad 0 = \Sigma y d^2x$$
$$y_i = \mu x_i + \mu_1 dx_i + \mu_2 d^2x_i \qquad (i = 1 \ldots 4). \tag{12}$$

Multipliziert man die letzte Gleichung mit y_i und addiert, so folgt mit Rücksicht auf die 3 ersten:

$$\Sigma y^2 = 1 = \mu \,.\, \cos\rho.$$

Setzt man den Ausdruck für y_i in die 3 ersten ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \Sigma yx &= \cos\rho = \mu s_{00} + \mu_1 s_{01} + \mu_2 s_{02} \\ \Sigma y dx &= 0 \quad\;\; = \mu s_{10} + \mu_1 s_{11} + \mu_2 s_{12} \\ \Sigma y d^2x &= 0 \quad\;\; = \mu s_{20} + \mu_1 s_{21} + \mu_2 s_{22}. \end{aligned}$$

Die Faktoren μ eliminiert:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & \cos\rho & 0 & 0 \\ \cos\rho & s_{00} & s_{01} & s_{02} \\ 0 & s_{10} & s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{20} & s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}$$

oder nach Einl. (XII) und (XIV) und (XVa):

$$\cos^2\rho = \frac{S^{(2)}}{S_{00}^{(2)}}; \quad \sin^2\rho = \frac{S_{00}^{(2)} - S^{(2)}}{S_{00}^{(2)}} = \frac{ds^6}{S_{00}^{(2)}}; \quad \operatorname{tang}^2\rho = \frac{ds^6}{S^{(2)}}. \tag{13}$$

ausgeführt:

$$\sin^2\rho = \frac{ds^4}{\Sigma(d^2x)^2 - (d^2s)^2}; \quad \operatorname{tang}^2\rho = \frac{ds^4}{\Sigma(d^2x)^2 - (d^2s)^2 - ds^4}. \tag{13a}$$

Sucht man dasjenige Gebilde, welches zum Krümmungskreis dualistisch ist, so findet man einen gewissen Kegel zweiter Ordnung. Die Spitze des Kegels, welche der Ebene des Krümmungskreises entspricht, ist der Punkt x der Kurve. Drei Tangentialebenen des Kegels werden gebildet von drei konsekutiven Schmiegungsebenen. Sämtliche Tangentialebenen des Kegels bilden mit einer festen, durch x gehenden Ebene (welche dem Krümmungsmittelpunkt entspricht) den konstanten Winkel ψ (dualistisch zum Krümmungsradius ρ). Durch dualistische Übertragung erhält man aus (13a):

$$\sin^2\psi = \frac{dw_2{}^4}{\Sigma(d^2\lambda)^2 - (d^2w_2)^2}; \quad \operatorname{tang}^2\psi = \frac{dw_2{}^4}{\Sigma(d^2\lambda)^2 - (d^2w_2)^2 - (dw_2)^4} \tag{14}$$

Nun ergiebt sich unmittelbar der Zusammenhang zwischen den oben definierten Krümmungen und den Grössen ρ, ψ.

Nach den Gleichungen (10), (13), (13a) und (14) ist:

(15) Die erste Krümmung: $\frac{dw_1}{ds} = \frac{1}{\text{tang } \rho}$

dualistisch dazu:

(16) $$\frac{dw_1}{dw_2} = \frac{1}{\text{tang } \psi}.$$

Die zweite Krümmung (Torsion):

(17) $$\frac{dw_2}{ds} = \frac{\text{tang } \psi}{\text{tang } \rho}.$$

„Die Grösse tang ψ stellt also das Verhältnis der zweiten zur ersten Krümmung dar."

IV. Darstellung der Differentiale $d\alpha$, $d\lambda$, dl in den Grössen α, λ, l, ρ und ψ.

Durch Differentiation von (3) folgt:

(18) $\frac{d\alpha_i}{ds} = \frac{ds \,.\, d^2x_i - d^2s \,.\, dx_i}{ds^3}$ oder wegen (4a):

(19) $\frac{d\alpha_i}{ds} = \frac{\sqrt{S^{(2)}} \,.\, l_i}{ds^3} - x_i = \frac{l_i}{\text{tang } \rho} - x_i$ (Gl. 13) $(i = 1 \ldots 4)$.

Die dualistische Gleichung lautet:

(19a) $$\frac{dl_i}{dw_2} = \frac{\alpha_i}{\text{tang } \psi} - \lambda_i$$

oder wenn man mit (17) multipliziert:

(20) $$\frac{dl_i}{ds} = \frac{\alpha_i}{\text{tang } \rho} - \lambda_i \frac{\text{tang } \psi}{\text{tang } \rho} \qquad (i = 1 \ldots 4)$$

Endlich folgt durch Multiplikation von (3a) mit (17)

(21) $$\frac{d\lambda_i}{ds} = l_i \frac{\text{tang } \psi}{\text{tang } \rho} \qquad (i = 1 \ldots 4).$$

Einige weitere Relationen folgen aus (18) durch Quadrieren und Addieren:

$$\frac{\Sigma d\alpha^2}{ds^2} = \frac{\Sigma (d^2x)^2 - (d^2s)^2}{ds^4} = \frac{1}{\sin^2 \rho}; \quad \text{dualistisch:}$$

$$\frac{\Sigma dl^2}{dw_2{}^2} = \frac{1}{\sin^2 \psi}; \quad \text{daher nach (15) und (16):}$$

(22) $$dw_1{}^2 = \frac{ds^2}{\text{tang}^2 \rho} = \Sigma d\alpha^2 - ds^2 = \frac{(dw_2)^2}{\text{tang}^2 \psi} = \Sigma dl^2 - (dw_2)^2$$

oder $$ds^2 + \Sigma dl^2 = (dw_2)^2 + \Sigma d\alpha^2.$$

V. Osculationsradius.

Wir betrachten schliesslich die oskulierende Kugel (Radius R), die durch 4 konsekutive Punkte der Raumkurve geht. Bezeichnet man mit y_i' die Koordinaten ihres Mittelpunkts, so wird:

(23) $\cos R = \Sigma y' x;\ 0 = \Sigma y' dx;\ 0 = \Sigma y' d^2x;\ 0 = \Sigma y' d^3x.$

Die Grössen $y'_1 \ldots y'_4$ verhalten sich wie die Determinanten 3ter Ordnung der Matrix:

$$\begin{matrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 & d^3x_4 \end{matrix}$$

Mit Rücksicht auf $\Sigma y'^2 = 1$ und $| dx\ d^2x\ d^3x |^2 = S_{00}^{(3)}$;

folgt $S_{00}^{(3)} \cdot \cos^2 R = | x\ dx\ d^2x\ d^3x |^2 = S^{(3)}$

oder

(24) $$\cos^2 R = \frac{S^{(3)}}{S_{00}^{(3)}}.$$

Der Punkt x_i der Kurve, der Mittelpunkt y_i des Krümmungskreises und der Mittelpunkt y'_i der oskulierenden Kugel bilden ein bei y rechtwinkliges Dreieck. Ist daher w der Winkel bei x zwischen dem Radius des Krümmungskreises und dem Radius der oskulierenden Kugel, so wird nach Einl. (Xa):

$$\text{tang } (x\,y) = \text{tang } (x\,y') \cdot \cos w$$

also $$\text{tang } \rho = \text{tang } R \cdot \cos w$$ [1]).

Für den unendlich benachbarten Punkt bleibt R konstant:

$$\frac{d\rho}{\cos^2\rho} = -\text{tang } R \cdot \sin w \cdot dw$$

daher, wenn man w eliminiert:

$$\text{tang}^2 R = \text{tang}^2 \rho + \frac{d\rho^2}{\cos^4\rho \cdot dw^2}.$$

dw ist der Winkel zweier konsekutiver Schmiegungsebenen; mithin $dw = dw_2$ (s. oben), und wegen (17)

(25) $$\text{tang}^2 R = \text{tang}^2 \rho + \frac{\frac{d\rho^2}{ds^2} \cdot \text{tang}^2 \rho}{\cos^4\rho \cdot \text{tang}^2 \psi}.$$

§ 5. Die allgemeine Flächenkurve [2]).

Für die Untersuchung der allgemeinen Flächenkurve sind die charakteristischen Elemente der Raumkurve, insbesondere

1) Killing l. c. pag. 194 f.
2) Grundformeln § 14. 15.

die Grössen ρ, ψ, R in den Parametern u_1, u_2 und ihren Differentialien darzustellen. Hiezu führt man zweckmässig noch den Winkel H zwischen der rektifizierenden Ebene l_i und der Tangentialebene X_i der Fläche ein. Es ist nach § 4 (4a) und (6), da $\Sigma Xx = 0 = \Sigma Xdx$:

$$\cos H = \Sigma Xl = \frac{ds}{\sqrt{S^{(2)}}} \Sigma Xd^2x \tag{1}$$

$$\sin H = \Sigma X\lambda = \frac{1}{\sqrt{S^{(2)}}} | X \times dx\ d^2x | . \tag{2}$$

Nun ist $\Sigma Xd^2x = L$; $| X \times dx\ d^2x | = N$; [§ 1 (7) und § 2 (8)] und nach § 4 (13):

$$\sqrt{S^{(2)}} = \frac{ds^3}{\text{tang } \rho};$$

daher:

$$\frac{\cos H}{\text{tang } \rho} = \frac{L}{ds^2}; \quad \frac{\sin H}{\text{tang } \rho} = \frac{N}{ds^3}. \tag{3}$$

Der Krümmungsradius ρ ist daher bestimmt durch:

$$\frac{1}{\text{tang}^2 \rho} = \frac{N^2 + L^2 ds^2}{ds^6}, \tag{4}$$

der Winkel H durch:

$$\text{tang } H = \frac{N}{L . ds} \tag{5}$$

Durch Differentiation von (2) folgt:

$$\cos H . dH = \Sigma X d\lambda + \Sigma \lambda . dX:$$

Nun ist:

$$\Sigma X d\lambda = dw_2 \Sigma Xl = dw_2 . \cos H \quad [\S\ 4\ (3a)]$$

$$\Sigma \lambda . dX = \frac{1}{\sqrt{S^{(2)}}} | dX \times dx\ d^2x | \quad [\S\ 4\ (6)]$$

Ferner ist:

$$\delta | dX \times dx\ d^2x | = | X \times \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{\partial x}{\partial u_2} | . | dX \times dx\ d^2x |$$

$$= \Sigma Xd^2x . \begin{vmatrix} \Sigma dX \frac{\partial x}{\partial u_1} & \Sigma dx \frac{\partial x}{\partial u_1} \\ \Sigma dX \frac{\partial x}{\partial u_2} & \Sigma dx \frac{\partial x}{\partial u_2} \end{vmatrix} = \delta . M . L; \text{ daher:}$$

$$\cos H . dH = dw_2 . \cos H + \frac{\text{tang } \rho}{ds^3} L . M.$$

Der Wert von cos H aus (3) eingesetzt:

$$\frac{dw_2}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{M}{ds^2} \quad \text{oder} \tag{6}$$

$$\frac{\tan g\,\psi}{\tan g\,\rho} = \frac{dH}{ds} - \frac{M}{ds^2}, \text{ oder wegen (4):} \tag{6a}$$

$$\tan g^2\,\psi = \frac{(-M + dH \,.\, ds)^2}{(N^2 + L^2 ds^2)}\, ds^2 \tag{7}$$

Durch die Formeln (4), (5) und (7) sind die Grössen ρ, ψ und H bestimmt; dH ist aus (5) zu bilden. Es bleibt noch übrig, den Oskulationsradius R zu berechnen. Dieser hängt ausser von den schon berechneten Grössen auch von $d\rho$ ab [§ 4 (25)]. Um $d\rho$ ausdrücken, differenziert man die erste Gleichung (3):

$$-\frac{\cos H}{\sin^2 \rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} - \frac{\sin H}{\tan g\,\rho} \cdot \frac{dH}{ds} = \frac{dL}{ds^3} - \frac{2\,Ld^2s}{ds^4}. \tag{8}$$

Nun ist

$$M \,.\, N = | \; X \;\; x \;\; dX \;\; dx \; | \,.\, | \; Xx \;\; dx d^2x \; | = - ds(Ld^2s + ds \Sigma dX d^2x)$$

daher nach (6) und (3):

$$\frac{2 \sin H}{\tan g\,\rho}\left(\frac{dw_2}{ds} - \frac{dH}{ds}\right) = -\frac{2\,MN}{ds^5} = 2\,\frac{Ld^2s}{ds^4} + 2\,\frac{\Sigma dX d^2x}{ds^3}.$$

Diese Gleichung zu (8) addiert:

$$-\frac{\cos H}{\sin^2 \rho} \cdot \frac{d\rho}{ds} + \frac{\sin H}{\tan g\,\rho}\left(2\,\frac{\tan g\,\psi}{\tan g\,\rho} - 3\,\frac{dH}{ds}\right) = \frac{dL}{ds^3} + 2\,\frac{\Sigma dX d^2x}{ds^3}$$

$$= \frac{1}{ds^3}\left(\Sigma dX d^2x - \Sigma dx d^2X\right) = P. \tag{9}$$

Für den Ausdruck P findet man folgende, von den 2ten Differentialien der u_i unabhängige Form:

$$P \,.\, ds^3 = du_1^{\,3}\left[\frac{\partial d_{11}}{\partial u_1} - 2\,(d_{11} p_{1,11} + d_{12} \cdot p_{2,11})\right]$$

$$+ 3\,du_1^{\,2} du_2 \left[\frac{\partial d_{11}}{\partial u_2} - 2\,(d_{11} \cdot p_{1,12} + d_{12} p_{2,12})\right]$$

$$+ 3\,du_1 du_2^{\,2}\left[\frac{\partial d_{22}}{\partial u_1} - 2\,(d_{21} \cdot p_{1,21} + d_{22} p_{2,21})\right]$$

$$+ du_2^{\,3}\left[\frac{\partial d_{22}}{\partial u_2} - 2\,(d_{21} \cdot p_{1,22} + d_{22} p_{2,22})\right]$$

Nach Analogie der Euklid'schen Geometrie führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(10)\begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{tang}\rho} = \dfrac{\sqrt{N^2+L^2ds^2}}{ds^3} & \text{die erste (absolute) Krümmung,} \\ \dfrac{\cos H}{\operatorname{tang}\rho} = \dfrac{L}{ds^2} & \text{die normale Krümmung,} \\ \dfrac{\sin H}{\operatorname{tang}\rho} = \dfrac{N}{ds^3} & \text{die tangentiale Krümmung,} \\ \dfrac{dw_2}{ds} = \dfrac{dH}{ds} - \dfrac{M}{ds^2} & \text{die zweite Krümmung (absolute Torsion),} \\ \left[\dfrac{dw_2}{ds}\right] = -\dfrac{M}{ds^2} & \text{die geodätische Torsion.} \end{cases}$$

Mit Hilfe der abgeleiteten Formeln lassen sich die wichtigsten Sätze über Flächenkurven in einfacher Form beweisen, genau wie in der Euklid'schen Geometrie; es genügt einige Beispiele anzuführen.

Satz von Meusnier[1]). Ist auf der Fläche eine beliebige Kurve und ein Normalschnitt gegeben, welcher die Kurve im Punkt u_1, u_2 berührt, so sind in diesem Punkt die Ausdrücke L und ds^2, die nur von den ersten Differentialien $du_1 : du_2$ abhängen, für beide Kurven gleich. Für den Normalschnitt ist $H = 0$. Ist daher ρ der Krümmungsradius der Kurve, r der des Normalschnitts, so ist nach (3):

$$\frac{1}{\operatorname{tang} r} = \frac{L}{ds^2} = \frac{\cos H}{\operatorname{tang}\rho}. \qquad \text{s. § 2 (28).}$$

Den Ausdruck $\dfrac{1}{\operatorname{tang} r}$ heisst man „normale Krümmung" der Kurve.

„Die Tangente des Krümmungsradius einer beliebigen Kurve ist gleich der Projektion der Tangente des Krümmungsradius des Normalschnitts auf die Schmiegungsebene der Kurve."

Satz von Joachimsthal. „Ist die Schnittkurve zweier Flächen F_1 und F_2 für jede von ihnen eine Krümmungslinie, so ist längs derselben der Winkel beider Flächen konstant."

1) Killing, pag. 296.

Für die erste Fläche ist $M_1 = 0$, für die zweite $M_2 = 0$, also nach (6), da dw_2 für beide Flächen dasselbe ist:

$$dw_2 - dH_1 = 0\,;\ dw_2 - dH_2 = 0\,;\ \text{daraus}$$
$$H_1 - H_2 = \text{const.}$$

Aus Gleichung (10) folgen noch folgende Sätze:

Für eine Krümmungslinie ist $M = 0$; $dH = dw_2$ und $\left[\frac{dw_2}{ds}\right] = 0$; d. h. die geodätische Torsion ist Null.

Für eine Asymptotenlinie ist $L = 0$; $H = \frac{\pi}{2}$; also

$$\frac{1}{\text{tang } \rho} = \frac{N}{ds^3}\,;\quad \frac{dw_2}{ds} = \left[\frac{dw_2}{ds}\right] = -\frac{M}{ds^2}$$

und nach § 1 (15) und § 2 (23)

$$\left(\frac{dw_2}{ds}\right)^2 = \frac{M^2}{ds^4} = \frac{dS^2}{ds^2} = -k.$$

„Für eine Asymptotenlinie ist die absolute Krümmung gleich der tangentialen; die absolute Torsion gleich der geodätischen; das Quadrat der letzteren gleich dem negativen Krümmungsmass."

Für eine geodätische Linie ist $N = 0$, $H = 0$; also

$$\frac{1}{\text{tang } \rho} = \frac{L}{ds^2}\,;\quad \frac{dw_2}{ds} = \left[\frac{dw_2}{ds}\right] = -\frac{M}{ds^2}.$$

„Für eine geodätische Linie ist die absolute Krümmung gleich der normalen; die geodätische Torsion irgend einer die geodätische Linie berührenden Kurve ist gleich der absoluten Torsion der geodätischen Linie."

Ist eine Flächenkurve zugleich Krümmungslinie und geodätische Linie ($M = 0$; $N = 0$; $H = 0$), so ist

$$\frac{dw_2}{ds} = 0$$

d. h. die Torsion ist Null; die Kurve ist eben und liegt in einer Normalebene der Fläche.

Ist die Kurve zugleich Krümmungslinie und Asymptotenlinie ($M = 0$, $L = 0$; $H = \frac{\pi}{2}$), so wird

$$\frac{dw_2}{ds} = \left[\frac{dw_2}{ds}\right] = 0$$

d. h. die Torsion ist Null; die Kurve ist eben und liegt in der Tangentialebene der Fläche.

Ist endlich die Kurve gleichzeitig Asymptotenlinie und geodätische Linie ($L = 0$; $N = 0$), so wird $\frac{1}{\text{tang } \rho} = 0$; d. h. die Kurve ist eine Gerade [1]).

1) Die beiden letzten Sätze sind in den Grundformeln durch ein Versehen falsch ausgesprochen.

Inhalt.

pag.

Einleitung. Hilfssatz aus der Determinantentheorie. Definitionen der Nicht-Euklid'schen Geometrie . . . . . 5—12

§ 1. Die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung . . . . 13—17

§ 2 Besondere Kurven auf der Fläche: Minimallinien. Geodätische Linien. Konjugierte Richtungen. Asymytotenlinien. Krümmungs-Linien . . . . . 18—27

§ 3. Krümmungsmass. Indikatrix . . . . . 28—29

§ 4. Die allgemeine Raumkurve . . . . . 30—36

§ 5. Die allgemeine Flächenkurve . . . . . 37—41